ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ($2^η$ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ) PART B'

Άσκηση 1

Έστω το παραβολοειδές : $(S): z = x^2+y^2$

i) Νδο είναι κανονική επιφάνεια

ii) Ποια η $1^η$, $2^η$ θεμελιώδης μορφή;

iii) Ποια η απεικόνιση Gauss;

iv) Ποια η μέση καμπυλότητα και η καμπυλότητα Gauss;

v) Ποια η κάθετη καμπυλότητα $k_n(c'(t))$ με $c(t) = X(t,t)$;

vi) Ποιες οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας στο $(0,0,0)$;

ΛΥΣΗ

i) Εφόσον $z = x^2+y^2 = h(x,y)$ γράφημα τότε η S θα είναι κανονική επιφάνεια

ii) Έστω $X: U \to X(U)$ συστ. συντ/νων με $X(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ τότε:

$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1+4u^2$

$F = \langle X_u, X_v \rangle = 4uv$

$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1+4v^2$

$w \in T_pS \Rightarrow w = aX_u + bX_v$

όπου $\{X_u, X_v\}$ ορθοκανονική βάση του T_pG_h εφ. χώρου

$I(w) = (1+4u^2)a^2 + (8uv)ab + (1+4v^2)b^2$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$

όπου

$II(w) = \dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} (a^2+b^2)$

όπου προφανώς $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$

iii) $N: G_f \xrightarrow{1-1} S^2$ με $N(u, v, u^2+v^2) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \cdot (-2u, -2v, 1)$

τα γραφήματα είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες.

vi) Καμπυλότητα Gauss:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{4}{(1+4v^2+4u^2)^2} > 0$$

Μέση καμπυλότητα:

$$H = \frac{Eg - 2fF + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

Έστω $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ όπου $c(0) = p$ και $c'(0) = w$

$x(t,t) = c(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(t) = x_u(t,t) + x_v(t,t)$

$\Rightarrow c'(0) = x_u(0,0) + x_v(0,0)$

Άλλη έκφραση... πιο άμεση

v) Κάθετη καμπυλότητα:

$$K_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} \quad \text{όπου} \quad c(t) = p, \ c'(t) = w$$

Εφόσον $x(t,t) = c(t)$ τότε θεωρώ $\tilde{c}(t) = (t,t)$

τ/ω: $c = x \circ \tilde{c} \Rightarrow c(t) = x \circ \tilde{c}(t) = x(\tilde{c}(t)) \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{λεία}} dc(t) = x_u(\tilde{c}(t)) + x_v(\tilde{c}(t)) = x_u(t,t) + x_v(t,t)$.

Έτσι,
$$k_n(c'(t)) = \frac{II_{c(t)}(c'(t))}{I_{c(t)}(c'(t))} = \frac{II_{c(t)}(x_u(t,t) + x_v(t,t))}{I_{c(t)}(x_u(t,t) + x_v(t,t))} =$$

$$= \frac{e(t,t)\cdot 1^2 + \cancel{2f(t,t)\cdot 1\cdot 1} + g(t,t)\cdot 1^2}{E(t,t)\cdot 1^2 + 2F(t,t)\cdot 1\cdot 1 + G(t,t)\cdot 1^2} =$$

$$= \frac{\frac{4}{\sqrt{1+8t^2}}}{2+8t^2+8t^2} = \frac{4}{(2+16t^2)\sqrt{1+8t^2}} = \frac{2}{(1+8t^2)(1+8t^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2}{(1+8t^2)^{3/2}}.$$

vi) $\{x_u(0,0), x_v(0,0)\}$ ορθοκανονική βάση στο $T_{(0,0,0)}G_h$, τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} Lx_u(0,0) = \langle Lx_u(0,0), x_u(0,0)\rangle x_u(0,0) + \langle Lx_u(0,0), x_v(0,0)\rangle x_v(0,0) \\ Lx_v(0,0) = \langle Lx_v(0,0), x_u(0,0)\rangle x_u(0,0) + \langle Lx_v(0,0), x_v(0,0)\rangle x_v(0,0) \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L X_u(0,0) = e(0,0)\, X_u(0,0) = 2\, X_u(0,0) \\ L X_v(0,0) = g(0,0)\, X_v(0,0) = 2\, X_v(0,0) \end{cases}$$

κυριες διευθυνσεις: $X_u(0,0)$ και $X_v(0,0)$ αντιστοιχα ισα με $(1,0,0)$, $(0,1,0)$.

Συνεπως, αφου οι κυριες καμπυλοτητες στο $(0,0,0)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα της $2^{ης}$ θεμελιώδους μορφης τοτε $k_1(0,0,0) = k_2(0,0,0) = 2$.

Ασκηση 2

Να βρεθούν η καμπυλοτητα Gauss και η μέση καμπυλοτητα της Επιφάνειας της σφαίρας $S(0,r)$ κεντρου το O και ακτινας r.

ΛΥΣΗ

Για τη σφαίρα γνωρίζουμε ότι μπορεί να παραμετρηθεί με αρκετές μορφές. Ας παραμετρήσουμε το βορειο ημισφαίριο της μέσω της απεικονισης (κανονική επιφάνεια).

$X : D \to S(0,r)$ οπου $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < r^2\}$

$X(u,v) = (u, v, \sqrt{r^2-u^2-v^2})$. Ετσι λαμβάνουμε

$$X_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\right) \quad \& \quad X_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\right)$$

Ετσι,

$$X_u \times X_v = \frac{1}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\,(u, v, \sqrt{r^2-u^2-v^2}) \rightsquigarrow \|X_u \times X_v\| = \frac{r}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}.$$

Προσανατολισιμη επιφάνεια όπως γράφημα με Προσανατολισμο: $N(p) = -\dfrac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|} = -\dfrac{1}{r}\cdot p$

οπου $p = (u, v, \sqrt{r^2-u^2-v^2})$.

(Χαριν ευκολιας στη σφαίρα συνήθως παίρνουμε το μοναδιαίο κάθετο με αντίθετο πρόσημο δηλ προς τα μέσα της σφαίρας) α' τρόπος: Θα βρούμε τον πίνακα της απεικόνισης Weingarten (ή γραμμικού τελεστή): $L_p = -dN_p$

Έχουμε τη σχέση

$$(N\circ X)(u,v) = -\frac{1}{r}\left(u, v, \sqrt{r^2-u^2-v^2}\right), \quad (u,v)\in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

όπου για τυχόν $q=(u,v)\in D$

$$N_u(q) = -\frac{1}{r}\left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\right) = -\frac{1}{r}X_u(q)$$

$$N_v(q) = -\frac{1}{r}\left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\right) = -\frac{1}{r}X_v(q).$$

Συνεπώς, για $p = X(q)$

$$dN_p(X_u(q)) = N_u(q) = -\frac{1}{r}X_u(q) + \cancel{0\,X_v(q)}^{\,0}$$

$$dN_p(X_v(q)) = N_v(q) = \cancel{0\,X_u(q)}^{\,0} - \frac{1}{r}X_v(q)$$

Άρα, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ πίνακας του διαφορικού $-d_pN$.

⇝ (Για αυτό παίρνουμε το αντίθετο του μοναδιαίου κάθετου).

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ:

$k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$

Άρα, $K = \det A = \frac{1}{r^2}$ και $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A = \frac{1}{r}$

β' τρόπος

Μέσω των θεμελιωδών ποσών

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \dots = \frac{1}{r^2} \quad \text{και} \quad H = \frac{1}{2}\cdot\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} = \dots = \frac{1}{r}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η επιφάνεια (S): $z=x^2-2y^2$

i) Νδο είναι κανονική

ii) Να βρεθούν:

α. οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο (0,0,0)

β. οι ασυμπτωτικές καμπύλες

iii) Να εξεταστεί αν υπάρχει συστ. συντ/μων για την S τέτοιο ώστε $e=g=0$

iv) Να βρεθούν οι κύριες διευθύνσεις στο (0,0,0)

ΛΥΣΗ

i) Για την (S) ορίζεται η παραμέτρηση $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to S\subset\mathbb{R}^3$ όπου $X(u,v)=(u,v,u^2-2v^2)$ όπου οπως γράφημα είναι κανονική

ii) ΘΕΜΕΛ. ΠΟΣΑ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ:

Για $S=\Gamma_h$ με $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ όπου $h(x,y)=z=x^2-2y^2$

$$e=\frac{h_{xx}}{\sqrt{1+h_y^2+h_x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \quad f=\frac{h_{xy}}{\sqrt{1+h_y^2+h_x^2}}=0$$

$$g=\frac{h_{yy}}{\sqrt{1+h_y^2+h_x^2}}=-\frac{4}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$. Όπου στο (0,0,0)

$e(0,0)=2, \quad f(0,0)=0, \quad g(0,0)=-4$

α. Έστω $w\in T_pS\setminus\{0\}$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{II}_{(0,0)}(w)=0$.

$W = a \cdot X_x(0,0) + b\, X_y(0,0)$, $(a,b) \neq (0,0)$

ασυμπτωτική διεύθυνση αν.ν

$e(0,0)a^2 + 2f(0,0)a\beta + g(0,0)\beta^2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a = \sqrt{2}\, b$ ή $a = -\sqrt{2}\, b$. α και $\beta \neq 0$ όπως γραμμικές

Έτσι, $W_1 = (\sqrt{2}\, X_x(0,0) + X_y(0,0))\, b$

και $W_2 = -\sqrt{2}\, X_x(0,0) + X_y(0,0))\, b$

$\Big\}$ 2 ασυμπτ. διευθύνσεις

(Επαλήθευση: $K = \dfrac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^2} = \dfrac{-4}{(1+4x^2+16y^2)} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 ασυμπτ. διευθύνσεις)

<u>Παρατήρηση:</u> Αφού $K<0 \Rightarrow$ όλα τα σημεία υπερβολικά

β. Έστω καμπύλη $c(t) = X(x(t), y(t))$ ασυμπτωτική αν.ν

$e(x'(t))^2 + 2f \underbrace{x'(t)y'(t)}_{\to 0} + g(y'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x'(t))^2 - 4(y'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - \sqrt{2}\, y(t) = c_1 \\ \text{ή} \\ x(t) + \sqrt{2}\, y(t) = c_2 \end{cases}$

2 οικογένειες ασυμπτωτικών καμπυλών:

1) $c_1(t) = X(c_1 + \sqrt{2}t, t) = (c_1 + \sqrt{2}t, t, (c_1+\sqrt{2}t)^2 - 2t^2)$

2) $c_2(t) = X(c_2 - \sqrt{2}t, t) = (c_1 - \sqrt{2}t, t, (c_1 - \sqrt{2}t)^2 - 2t^2)$

όπου είναι γραμμικές άρα είναι ευθείες.

<u>Παρατήρηση:</u> Η επιφάνεια είναι ευθειογενής

iv) όλα τα σημεία είναι υπερβολικά $\Rightarrow e = g = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ υπάρχει σύστημα συντ/νων $X: U \to S$ του
οποίου οι παραμετρικές καμπύλες να είναι
οι ασυμπτωτικές καμπύλες.

Έτσι, επιλέγουμε παραμέτρηση:

$$\begin{cases} u = x - \sqrt{2}y \\ v = x + \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u+v) \\ y &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(u-v) \end{aligned}$$ και έτσι

Ορίζουμε νέα απεικόνιση:

$$Y(u,v) = X\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2\sqrt{2}}(u-v)\right)$$

όπου θα πρέπει να δω είναι σύστ. συντ/νων.

v) $w = \alpha X_x(0,0) + \beta X_y(0,0)$ κύρια διεύθυνση ανν

$$\begin{vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

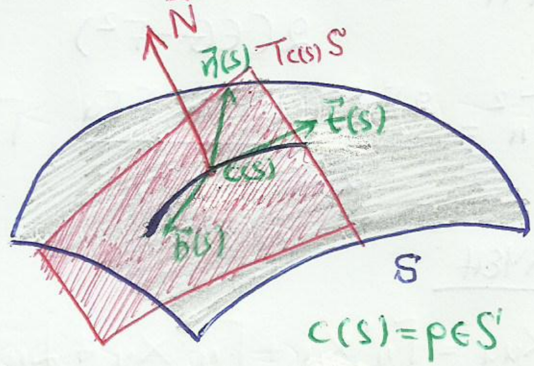
$E = 1 + 4x^2 \Rightarrow E(0,0) = 1$, $F = 8xy \Rightarrow F(0,0) = 0$
$G = 1 + 16y^2 \Rightarrow G(0,0) = 1$.

Άρα,
$$\begin{vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Άρα, οι κύριες διευθύνσεις είναι 2.
$X_x(0,0)$ και $X_y(0,0)$.

Άσκηση 4

Έστω $c: I \to S$ κανονική και S κανονική επιφάνεια. Αν η c έχει $k>0$ παντού και παράλληλα είναι ασυμπτωτική καμπύλη και καμπύλη καμπυλότητας τότε νδο η c επίπεδη.



ΛΥΣΗ

$\|\dot{c}(s)\| = \|\vec{t}(s)\| = 1$

c ασυμπτωτική καμπύλη

Τότε, $k_n(\dot{c}(s)) = 0 \Leftrightarrow II_{c(s)}(\dot{c}(s)) = 0 \Rightarrow \langle L_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow -\langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (N\circ c)^{\circ}(s), \dot{c}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancelto{0}{\langle N\circ c(s), \dot{c}(s) \rangle^{\circ}} - \langle N\circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle = 0 \xRightarrow{\vec{N} \perp \vec{t}}$

$\Rightarrow \langle N\circ c(s), \dot{\vec{t}}(s) \rangle = 0 \xRightarrow[k(s)>0]{\text{frenet}} \langle N\circ c(s), k(s)\vec{n}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k(s) \langle N\circ c(s), \vec{n}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{n}$

Άρα, $\vec{n}(s) \in T_{c(s)}S$

Έτσι, $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ μοναδιαίο και κάθετο στο $T_{c(s)}S$

Άρα, $\vec{b}(s) = \pm N(c(s)) \Rightarrow \vec{b}(s) = \pm N\circ c(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec{b}}(s) = \pm (N\circ c)^{\circ}(s) \Rightarrow -\tau(s)\vec{n}(s) = \pm (N\circ c)^{\circ}(s) \Longrightarrow$

$\xRightarrow[\text{Θ. Rodriguez}]{\text{c γραμ. καμπυλοτ.}} -\tau(s)\vec{n}(s) = \pm \lambda(s) \cdot \dot{c}(s) \Rightarrow -\tau(s)\vec{n}(s) \mp \lambda(s)\dot{c}(s) = 0$

$\Rightarrow -\tau(s)\vec{n}(s) \mp \lambda(s)\vec{t}(s) = 0 \xRightarrow{\vec{t}, \vec{n} \text{ γραμ. ανεξ.}} \tau(s) = 0, \ \forall s \in I$

$\Rightarrow$ Η καμπύλη c είναι επίπεδη.

Το επίπεδο της c ταυτίζεται με το εφαπτόμενο επίπεδο της S.

Άσκηση 5

Να δείξετε ότι τα σύμβολα Christoffel Γ_{ij}^k δίνονται απο τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G E_u - 2F F_u + F E_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{G E_v - F G_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2G E_v - G G_u - F G_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2E F_u - E E_v + F E_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{E G_u - F E_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{E G_v - 2F F_v + F G_u}{2(EG-F^2)}$$

ΛΥΣΗ

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_{11} N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x_{uu}, x_u \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_v, x_u \rangle + L_{11} \cancel{\langle N, x_u \rangle}^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \langle x_u, x_u \rangle_u = E \cdot \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} E_u = E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2} \quad (1)$$

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_{11} N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x_{uu}, x_v \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_v, x_v \rangle + \cancel{L_{11} \langle N, x_v \rangle}^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x_u, x_v \rangle_u - \langle x_u, x_{uv} \rangle = \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G} \quad (2)$$

Επιλύουμε, ως σύστημα τις (1) & (2):

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} E_u \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \dots \\ \Gamma_{11}^2 = \dots \end{array}$$

ομοίως και για τα υπόλοιπα σύμβολα

Άσκηση 6

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(u,v) \longmapsto (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)$

1) Είναι κανονική επιφάνεια;
2) Είναι ευθειογενής;
3) Είναι αναπτυκτή;
4) Ποια η εξίσωση της επιφάνειας;

ΛΥΣΗ

1) $X_u = (-\sin u - v\cos u, \cos u - v\sin u, 0)$

$X_v = (-\sin u, \cos u, 1)$

$X_u \times X_v = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, -v)$

$\|X_u \times X_v\| = 1 + 2v^2 > 0 \Rightarrow$ κανονική

2) $X(u,v) = \underbrace{(\cos u, \sin u, 0)}_{c(u)} + v\underbrace{(-\sin u, \cos u, 1)}_{w(u) \neq 0}$

Γράφεται στη μορφή ευθειογενούς

3) α' τρόπος:
$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}}(\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, -v)$$

βλέπουμε ότι το μοναδιαίο κάθετο εξαρτάται (μη τετριμμένα) από το v άρα δεν είναι σταθερό κατά μήκος κάθε γενέτειρας $\Rightarrow$ όχι αναπτυκτή

β' τρόπος Η καμπυλότητα gauss $K < 0 \Rightarrow$ όχι αναπτυκτή.

4) Θεωρώ $x(u,v) = \cos u - v\sin u$, $y(u,v) = \sin u + v\cos u$, $z(u,v) = v$

όπου $x^2 + y^2 = 1 + v^2 = 1 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1$ μονόχωνο υπερβολοειδές

Άσκηση 7

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση

Θεωρούμε παραμετρική επιφάνεια $x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (u - f(u-v), u, v)$

Νδο

i) Η x κανονική

ii) όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι παράλληλα σε σταθερό διάνυσμα.

iii) όλα τα σημεία της επιφάνειας είναι παραβολικά

iv) η επιφάνεια είναι ευθειογενής

v) η επιφάνεια είναι αναπτυκτή

ΛΥΣΗ

i) $x_u = (1 - f'(u-v), 1, 0)$, $x_v = (f'(u-v), 0, 1)$

$x_u \times x_v = (1, f'(u-v) - 1, -f'(u-v)) \neq (0,0,0)$

Άρα, x κανονική επιφάνεια

ii) $x_u \times x_v \perp x_u, x_v$ και $1 + f'(u-v) - 1 - f'(u-v) = 0$

Άρα, $x_u \times x_v \perp \vec{n} = (1,1,1)$ ώστε $\langle x_u \times x_v, \vec{n} \rangle = 0$

iii)

$$E = \|x_u\|^2 = (1 - f'(u-v))^2 + 1$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = f'(u-v)(1 - f'(u-v))$$

$$G = \|x_v\|^2 = 1 + (f'(u-v))^2$$

$$\vec{N} = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{(1, -1 + f(u-v), -f'(u-v))}{\|x_u \times x_v\|}$$

$$e = \langle x_{uu}, \vec{N} \rangle = \frac{-f''(u-v)}{\|x_u \times x_v\|}$$

$$f = \langle x_{uv}, \vec{N} \rangle = \frac{f''(u-v)}{\|x_u \times x_v\|}$$

$$g = \langle x_{vv}, \vec{N} \rangle = -\frac{f''(u-v)}{\|x_u \times x_v\|}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \Rightarrow$$ ολα τα σημεια παραβολικά

Παρατηρηση: Για να είναι επιπεδο το $X(u,v)$ σημειο θα πρεπει $f''(u-v)=0$

iv-v) Οπως ολα τα σημεία παραβολικα και η X αναπτυκτική $\Longrightarrow$ η X ευθειογενής

β' τροπος: Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\tilde{u} = u - v$ και $\tilde{v} = v$ ωστε

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$: γραμμικός ισομορφισμός

άρα διαφορομορφισμος. Τοτε:

$$X(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u}+\tilde{v} - f(\tilde{u}), \tilde{u}+\tilde{v}, \tilde{v}) =$$

$$= \underbrace{(\tilde{u} - f(\tilde{u}), \tilde{u}, 0)}_{c(\tilde{u})} + \tilde{v}\underbrace{(1,1,1)}_{w(\tilde{u})} \longrightarrow$$ ⊛ ολα τα εφαπτόμενα επιπεδα παράλληλα στο διανυσμα $(1,1,1)$ (β' τροπος του ερωτηματος ii)

Αρα, X ευθειογενης επιφάνεια και προφανως εξ ορισμου αναπτυκτική

#1 Παρατήρηση: Είναι κυλινδρική επιφάνεια διότι ολες οι γενετειρες είναι παράλληλες προς ενα σταθερο διανυσμα $(1,1,1)$

#2 Παρατηρηση: Η $X = X(u,v)$ είναι γραφημα Monge και μαλιστα της μορφής $X = (g(u,v), u, v)$